

# Commentarii Mathematici Helvetici

**Joris, Henri**

*...-Sätze für zwei arithmetische Funktionen*

Commentarii Mathematici Helvetici, Vol.47 (1972)

PDF erstellt am: 11 déc. 2008

## **Nutzungsbedingungen**

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert. Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre, Forschung und für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern ist nur mit vorheriger schriftlicher Genehmigung des Konsortiums der Schweizer Hochschulbibliotheken möglich. Die Rechte für diese und andere Nutzungsarten der Inhalte liegen beim Herausgeber bzw. beim Verlag.

## **SEALS**

Ein Dienst des *Konsortiums der Schweizer Hochschulbibliotheken*  
c/o ETH-Bibliothek, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz

[retro@seals.ch](mailto:retro@seals.ch)

<http://retro.seals.ch>

## $\Omega$ -Sätze für zwei arithmetische Funktionen

HENRI JORIS

### 1. Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von  $\Omega$ -Sätzen für die Restglieder der Idealfunktionen algebraischer Zahlkörper und für die Summenfunktion von Ramanujan's arithmetischer Funktion  $\tau(n)$ .

Für einen algebraischen Zahlkörper  $K$  vom Grade  $n$  über dem rationalen Körper  $\mathbb{Q}$  sei  $\zeta_K(s)$  die Dedekindsche Zetafunktion von  $K$ ;  $\lambda$  sei das Residuum von  $\zeta_K(s)$  bei  $s=1$ . Für  $\operatorname{Re} s > 1$  ist  $\zeta_K(s)$  gegeben durch

$$\zeta_K(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}. \quad (1)$$

Dabei bedeutet  $a(m)$  die Anzahl ganzer Ideale in  $K$ , deren Norm  $m$  beträgt. Für  $x > 0$  ist die Idealfunktion  $R_K(x)$  definiert durch

$$R_K(x) = \sum_{m \leq x} a(m), \quad (2)$$

was gleich der Anzahl ganzer Ideale in  $K$  ist, welche eine Norm kleiner als  $x$  haben (das Nullideal nicht mitgezählt). Es gilt

$$R_K(x) \sim \lambda x \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

(Zu diesen Angaben siehe [12], sowie [13] Seite 155 ff.) Das Restglied der Idealfunktion wird definiert als

$$P_K(x) = R_K(x) - \lambda x. \quad (4)$$

Ich werde folgendes beweisen:

**SATZ 1.** *Es sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper des Grades  $n$ ,  $\lambda$  das Residuum seiner Dedekindschen Zetafunktion,  $R_K(x)$  die Idealfunktion von  $K$ . Dann gilt für  $x \rightarrow \infty$ :*

$$R_K(x) - \lambda x = \Omega_{\pm} \left( x^{(n-1)/2n} \exp \left( c \frac{(\log \log x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log x)^{(n+1)/2n}} \right) \right) \quad (5)$$

mit einer von  $K$  abhängigen Konstante  $c > 0$ .

Dabei bedeutet  $\Omega_{\pm}$  folgendes: Es seien  $g(x), f(x)$  reelle Funktionen von  $x, x > 0$ ; ferner sei  $f(x) > 0$ . Dann besagt

$$g(x) = \Omega_+(f(x)) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

dass

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} > 0.$$

Analog besagt

$$g(x) = \Omega_-(f(x)) \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

dass

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} < 0.$$

Schliesslich ist

$$g(x) = \Omega_{\pm}(f(x))$$

gleichbedeutend mit:

$$g(x) = \Omega_+(f(x)) \quad \text{und} \quad g(x) = \Omega_-(f(x)).$$

Der zweite Satz bezieht sich auf Ramanujan's  $\tau$ -Funktion, definiert durch

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) z^m = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{24}, \quad |z| < 1. \quad (6)$$

Sowohl die Reihe als das unendliche Produkt sind konvergent für  $|z| < 1$ . Die durch sie dargestellte Funktion spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Modulfunktionen. Es gilt nun der

**SATZ 2.**

$$\sum_{m \leq x} \tau(m) = \Omega_{\pm}(x^{23/4} \log \log x). \quad (7)$$

Der Beweis dieses Satzes hängt wesentlich ab von folgendem Ergebnis:

**SATZ 3.** *Es existiert eine Konstante  $c > 0$  mit der Eigenschaft, dass*

$$\sum_{m \leq x} |\tau(m)| \geq cx^{25/4} \quad \text{für } x \geq 1. \quad (8)$$

Das bisher beste Resultat für das Restglied  $P_K(x)$ , welches für alle Körper  $K$  beliebigen Grades  $n$  gilt, ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sup P_K(x)}{\inf x^{(n-1)/2n}} = \pm \infty, \quad (9)$$

siehe [5]. Für  $n \geq 4$  gibt es ein Ergebnis von Szegoe und Walfisz, das besser als (5) ist, ebenso für nicht totalreelle kubische Zahlkörper ([20]). Für die übrigen Zahlkörper beweisen sie dieses Resultat einseitig, das heisst, entweder mit  $\Omega_-$  oder mit  $\Omega_+$ , nicht aber mit beiden. Für quadratische Körper siehe auch [1].

Nach oben bewies Landau [17] die Abschätzung:

$$P_K(x) = O(x^{(n-1)/(n+1)}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Da  $\tau(m)$  nicht für alle  $m$  nichtnegativ ist, hat die Summe

$$S(x) = \sum_{m \leq x} \tau(m)$$

keine asymptotische Annäherung durch eine einfache positive Funktion, wie sie etwa die Idealfunktion eines Zahlkörpers besitzt.  $S(x)$  hat vielmehr ähnliche Eigenschaften wie das Restglied der Idealfunktion. So bewies W. B. Pennington [19]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sup S(x)}{\inf x^{23/4}} = \pm \infty. \quad (10)$$

Andererseits gilt Rankin's Ergebnis (s. [19])

$$S(x) = O(x^{6-1/10}) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Weitere Eigenschaften und eine Liste von Referenzen findet man in [19]. Eine ausführliche Darstellung enthält das 10. Kapitel von [11].

Die Beweise von Satz 1 und Satz 2 folgen einem Verfahren, welches K. S. Gangadharan [10] sowie K. Corradi und J. Katai [8] für die Restglieder der Dirichletschen Teilerfunktion und der Kreisgitterfunktion verwendet haben, wobei sie dieselbe Abschätzung erhielten wie in Satz 1 im Falle  $n=2$ . Die Beweise sind eine gekürzte und in einigen Punkten abgeänderte Fassung meiner Dissertation [16], welche ich unter der Anleitung von Prof. K. Chandrasekharan schrieb.

## 2. Die Reihe $\sum a(m) e^{-sm^{1/n}}$

Eine entscheidende Rolle spielt die Funktion  $g(s)$ , definiert durch die Gleichung

$$g(s) = \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{\infty} a(m) e^{-sm^{1/n}} - \frac{n! \lambda}{s^{n+1}} - \frac{1}{s} \zeta_K(0) \quad (11)$$

für  $\text{Re } s > 0$ .

LEMMA 1. *Es sei  $\Delta$  der Betrag der Diskriminante von  $K$ ,  $r_1$  die Anzahl reeller Isomorphismen von  $K$ ,  $2r_2$  die Anzahl der komplexen Isomorphismen von  $K$ ,  $r_1 + 2r_2 = n$ . Ferner sei*

$$E = (2\pi)^{-1} \Delta^{1/n}, \quad B = (2\pi)^{-n} \Delta^{1/2}.$$

*Die für  $|v| < n$  konvergente Reihe*

$$L(v) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma^n\left(1 + \frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1 + m)} v^m \quad (12)$$

*stellt eine in  $\mathbb{C} - \{v \geq n\}$  analytische Funktion dar. Es gilt, für  $\text{Re } s > 0$ ,*

$$g(s) = B i^{r_1+r_2} \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m} M\left(\frac{s}{m^{1/n}}\right), \quad (13)$$

*wobei*

$$M(s) = \sum_{k=0}^n C_k L(E i e^{\pi i k/n} s). \quad (14)$$

*Die  $C_K$  sind von  $r_1$  und  $r_2$  abhängige komplexe Konstanten mit der Eigenschaft:*

$$C_n = 1, \quad (15)$$

$$\sum_{k=0}^n C_k = 0. \quad (16)$$

*$M(s)$  ist analytisch in  $\text{Re } s > 0$  sowie in  $|s| < nE^{-1}$ , und*

$$M(0) = 0. \quad (17)$$

Die Gleichung (13) ist bewiesen für  $|s| < nE^{-1}$  in [22], S.11 ff, und in [16], S.23 ff.

Die Fortsetzung von  $L(v)$  in das Schlitzgebiet  $\Omega_0 = \mathbb{C} - \{v \geq n\}$  erhält man durch Betrachtung des Integrals

$$L_1(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(z) \Gamma^n\left(1 - \frac{z}{n}\right) v^{-z} dz, \quad v > 0, \quad (18)$$

welches absolut konvergiert, denn mit reellem  $x, y$ , ist

$$|\Gamma(x + yi)| \sim \sqrt{2\pi} |y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\pi|y|} \quad \text{für } |y| \rightarrow \infty, \quad (19)$$

und zwar gleichmässig in jedem beschränkten  $x$ -Intervall (für die Eigenschaften der Gammafunktion siehe [9], Vol. 1). Wegen (19) lässt sich die Integrationsgerade in (18) nach  $\frac{1}{2}-m$ ,  $m=1, 2, \dots$ , verschieben. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} L_1(v) &= \sum_{k=0}^{m-1} \Gamma^n\left(1 + \frac{k}{n}\right) v^k \operatorname{Res}_{z=-k} \Gamma(z) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-m-i\infty}^{\frac{1}{2}-m+i\infty} \Gamma(z) \Gamma^n\left(1 - \frac{z}{n}\right) v^{-z} dz \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \Gamma^n\left(1 + \frac{k}{n}\right) v^k \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-m-i\infty}^{\frac{1}{2}-m+i\infty} \Gamma(z) \Gamma^n\left(1 - \frac{z}{n}\right) v^{-z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nun ergibt die Stirlingsche Formel, mit  $z = x + iy$ ,

$$|\Gamma(z)| \sim \sqrt{2\pi} |z|^{x-\frac{1}{2}} e^{-x-y \arctg(y/x)} \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty,$$

gleichmässig in  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ . Ferner ist

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z \cdot \Gamma(1-z)}.$$

Mit einigen leichten Zwischenrechnungen erhält man für  $-\infty < y < \infty$ ,  $z = \frac{1}{2} - m + iy$ :

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(z) \Gamma^n\left(1 - \frac{z}{n}\right) v^{-z} \right| \\ & < c v^{m-\frac{1}{2}} e^{|y|(\arctg(|y|/m) - \arctg(|y|/(n+m)) - \pi)} n^{-m} \left(1 + \frac{n}{m}\right) (m + |y|)^{\frac{1}{2}(n-1)} \\ & < c_1 v^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{n}\right)^m e^{-\frac{1}{2}\pi|y|} (m + |y|)^{\frac{1}{2}(n-1)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\frac{1}{2}-m-i\infty}^{\frac{1}{2}-m+i\infty} \Gamma(z) \Gamma^n\left(1-\frac{z}{n}\right) v^{-z} dz \right| \\ & < 2c_1 v^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{n}\right)^m \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi y} (m+y)^{\frac{1}{2}(n-1)} dy \\ & \leq c_2 v^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{v}{n}\right)^m e^{\frac{1}{2}\pi m} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\pi y} y^{\frac{1}{2}(n-1)} dy. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht gegen 0 für  $m \rightarrow \infty$ , falls  $v < ne^{-\frac{1}{2}\pi}$ ,

$$L_1(v) = L(-v) \quad \text{für} \quad 0 < v < ne^{-\frac{1}{2}\pi}. \quad (22)$$

Schreibt man  $v = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ , so folgt aus (19) sofort, dass das Integral in (18) lokal gleichmäßig konvergiert für  $|\theta| < \pi$ , wo also  $L_1(v)$  analytisch ist. Dies ergibt nun mit (22) die Fortsetzung von  $L(v)$  in  $\Omega_0$ .

Aus diesem Ergebnis und der Gleichung (16) folgen unmittelbar unsere Behauptungen über die Funktion  $M(s)$ . Aus (17) folgt  $M(s) = O(|s|)$  für  $|s| \rightarrow 0$ , daraus die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (13) und die Identität (13). Man benutzt dabei, dass

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^{1+1/n}} < \infty. \quad (23)$$

In [22] und [16] wird gezeigt, dass sich  $L(v)$  von beiden Seiten über die Linie  $v > n$  analytisch fortsetzen lässt. Zusammen mit (17) erhält man daraus das

**KOROLLAR.** Die durch (11) definierte Funktion  $g(s)$  ist in  $|s| < nE^{-1}$  regulär, ebenso auf  $\text{Res} \geq 0$  mit Ausnahme der Punkte  $s = \pm im^{1/n}nE^{-1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ; in diesem Regularitätsgebiet wird  $g(s)$  durch (13) gegeben.

Während in [16] die Fortsetzung von  $L(v)$  über  $v > n$  durch elementare, aber etwas komplizierte Weise gegeben wird, benutzt Walfisz in [22] die Existenz einer linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für  $L(v)$  und wendet darauf die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen im Komplexen an. Es gilt nämlich mit gewissen Konstanten  $a_1, \dots, a_n$ :

$$(v^n - n^n) L^{(n)}(v) + a_1 v^{n-1} L^{(n-1)}(v) + \dots + a_n L(v) = 0. \quad (24)$$

Die Singularitäten dieser Gleichung liegen bei

$$v = ne^{(2\pi ik)/n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

d.h.  $v > n$  ist singularitätenfrei, woraus die analytische Fortsetzung folgt.

LEMMA 2. Für  $v \in \Omega_0$  und  $v \rightarrow n$  ist mit einem  $B_1 > 0$ :

$$L(v) = B_1 (n - v)^{-\frac{1}{2}(n+1)} + O(|n - v|^{-\frac{1}{2}n} |\log |n - v||) \quad (25)$$

$$= B_1 (n - v)^{-\frac{1}{2}(n+1)} + O(|n - v|^{-\frac{1}{2}n - \varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \quad (26)$$

Ferner existiert ein reelles  $A$ , derart dass in  $\Omega_0$  gilt:

$$L(v) = O(|v|^A) \quad \text{für} \quad |v| \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Die Gleichung (25) ist in [22] bewiesen, (26) folgt trivialerweise aus (25). In [16] beweise ich (26) sogar mit  $\varepsilon = 0$ , falls  $|\arg(n - v)| < \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ , ist. Diese Verbesserung ist aber hier ohne Belang. Das Vorzeichen in

$$(n - v)^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

wird so gewählt, dass der Ausdruck für  $v < n$  positiv ist.

Die Abschätzung (27) ist in [16] mit  $A = 0$  bewiesen. Durch geeignete Verformung des Integrationsweges in (18) erhält man sogar

$$L(v) = O(|v|^{-n} (\log |v|)^{n-1}), \quad |v| \rightarrow \infty \quad \text{in} \quad \Omega_0.$$

Da aber der genaue numerische Wert von  $A$  nicht wichtig ist, kann man (27) schnell beweisen. Die Gleichung (24) geht durch die Substitution

$$v = w^{-1}, \quad L(v) = L_2(w)$$

über in

$$L_2^{(n)}(w) = (1 - w^n)^{-1} \sum_{k=1}^n b_k w^{-k} L_2^{(n-k)}(w),$$

mit Konstanten  $b_1, \dots, b_n$ . Für diese Differentialgleichung ist  $w = 0$  eine Stelle der Bestimmtheit (s. [3]), woraus folgt

$$L_2(w) = O(|w|^{-A}), \quad \text{für} \quad w \rightarrow 0,$$

also (27), mit einem gewissen reellen  $A$ .

Für die Funktion  $M(s)$  erhält man aus Lemma 2, falls  $D = nE^{-1}$  gesetzt wird (mit  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  in (26)):



LEMMA 3. Für  $0 < \sigma < D$  ist

$$M(\sigma + iD) = B_2 e^{(r_1 + r_2 - (n+1)/2)(\pi/2)i} \sigma^{-(n+1)/2} + O(\sigma^{-(n/2 + 1/4)}) \quad (28)$$

mit einem  $B_2 > 0$ . Ferner gilt für  $0 < \varepsilon < D$ ,  $R \geq \frac{1}{2}D$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ ,  $|s| \leq R$ ,  $|s \pm iD| \geq \varepsilon$ :

$$M(s) = O(\varepsilon^{-(n+1)/2} R^A) \quad (29)$$

mit einem  $A \geq 0$ .

Lemma 1 und Lemma 3 ermöglichen uns nun eine Bestimmung des Verhaltens von  $g(s)$  in  $\operatorname{Re} s > 0$ , insbesondere in der Nähe von  $\infty$  und nahe den Singularitäten  $s = \pm im^{1/n}D$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

LEMMA 4. Es sei  $Y \geq 2$ ,  $1 \leq m \leq Y$ ,  $m$  ganz,  $0 < \sigma < D$ . Dann ist mit positiven Konstanten  $B_0, A$ :

$$\sigma^{(n+1)/2} g(\sigma \pm im^{1/n}D) = B_0 e^{\pm i\pi(r_1 - 3)/4} \frac{a(m)}{m^{(n+1)/2n}} + O(\sigma^{1/4} Y^A). \quad (30)$$

LEMMA 5. Es sei  $0 < \omega < D$ ,  $k \geq 1$ ,  $\operatorname{Re} s > 0$ ,  $|s| \leq k$ , sowie  $|s \pm im^{1/n}D| > \omega$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  Dann ist

$$g(s) = O(\omega^{-(n+1)/2} k^A) \quad (31)$$

mit einem  $A \geq 0$ .

Da die Beweise sehr ähnlich wie in [10] verlaufen, beweise ich hier nur Lemma 5. (Für eine genaue Durchführung siehe [16].) Es ist

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{i^{r_1 + r_2} B}{s} \left( \sum_{m \leq (2k/D)^n} + \sum_{m > (2k/D)^n} \right) \frac{a(m)}{m} M\left(\frac{s}{m^{1/n}}\right) \\ &= \sum_1 + \sum_2. \end{aligned}$$

Ferner

$$|sm^{-1/n} \pm iD| = m^{-1/n} |s \pm iDm^{1/n}| > m^{-1/n} \omega, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$|sm^{-1/n}| \leq \frac{k}{m^{1/n}}.$$

Da  $m^{-1/n}\omega < D$  sowie  $km^{-1/n} \geq \frac{1}{2}D$  für  $m \leq (2k/D)^n$ , so folgt aus (29) falls  $|s| > \frac{1}{2}D$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_1 &= O\left(\sum_{m \leq (2k/D)^n} \frac{a(m)}{m} m^{(n+1)/2n} \omega^{-(n+1)/2} k^A m^{-A/n}\right) \\ &= O\left(\sum_{m \leq (2k/D)^n} m^{\varepsilon - 1 + (n+1-2A)/2n} k^A \omega^{-(n+1)/2}\right) \\ &= O(k^{A_1} \omega^{-(n+1)/2}). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Denn  $a(m) = O(m^\varepsilon)$  für alle  $\varepsilon > 0$ , siehe z.B. [6], Lemma 9. Falls  $m > (2k/D)^n$ , ist  $|s|m^{-1/n} \leq kD/(2k) = \frac{1}{2}D$ , also, weil  $M(v) = O(|v|)$  für  $|v| \leq \frac{1}{2}D$  ( $M(0) = 0$ ),

$$\sum_2 = O\left(\frac{1}{|s|} \sum_{m > (2k/D)^n} \frac{a(m)|s|}{m^{1+1/n}}\right) = O(1). \quad (33)$$

Aus (32) und (33) folgt (31) mit  $A$  für  $A_1$ , falls  $|s| > \frac{1}{2}D$ . Für  $|s| \leq \frac{1}{2}D$  ist aber wegen dem Korollar zu Lemma 1 sogar  $g(s) = O(1)$ .

### 3. Eine Folge von Primzahlen, welche Norm eines Ideals sind

Ich beweise hier ein Resultat, das zwar implizit aus bekannten Formeln der analytischen Theorie der Primzahlen folgt, das ich aber nirgends in der speziellen, hier benötigten Fassung finden konnte.

LEMMA 6. *Es sei  $K$  ein algebraischer Zahlkörper. Dann existiert eine Folge von Primzahlen  $p_1, p_2, \dots$  mit  $a(p_j) \geq 1$ , und mit der Eigenschaft:*

$$\sum_{p_j \leq x} 1 \sim c \frac{x}{\log x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad (34)$$

wo  $c > 0$  eine von  $K$  abhängige Konstante ist.

*Beweis.* Es sei  $K_0$  die Galoissche Abschliessung von  $K$ . Jede rationale Primzahl hat in  $K_0$  folgende Zerfällung in Primfaktoren ([14], Bd. 2, S.38 ff., Satz 11):

$$\begin{aligned} p &= (\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_g)^{e_0} \\ Nm(\mathfrak{p}_j) &= p^f, \quad j = 1, \dots, g, \quad f = G(p) = \text{Grad von } p, \\ e_0 g f &= N, \end{aligned}$$

wo  $N = [K_0 : \mathbf{Q}]$ . Es ist  $e_0 = 1$ , genau wenn  $(d, p) = 1$ , wobei  $d$  die Diskriminante von  $K_0$  ist. Für  $\text{Res} > 1$  ist

$$\begin{aligned} \zeta_{K_0}(s) &= \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{1}{Nm(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} = \\ &= \prod_{(Nm(\mathfrak{p}), d) > 1} \left(1 - \frac{1}{Nm(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1} \prod_{\substack{f|N \\ f > 1}} \prod_{\substack{G(p)=f \\ (p, d)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^{fs}}\right)^{-N/f} \times \\ &\times \prod_{\substack{G(p)=1 \\ (p, d)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-N}. \end{aligned}$$

Das erste Produkt ist endlich, das zweite konvergiert absolut für  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ . Diese beiden Produkte definieren also eine Funktion  $\xi(s)$ , welche in  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$  analytisch und nullstellenfrei ist. Da  $\zeta_{K_0}(1+it) \neq 0$  für reelles  $t \neq 0$ , und da  $\zeta_{K_0}(s)$  für  $\operatorname{Re} s \geq 1$  analytisch ist bis auf einen einfachen Pol bei  $s=1$ , gilt dasselbe für  $Z(s)$ ,

$$Z(s) = \prod_{\substack{G(p)=1 \\ (p,d)=1}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^N = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_j^s}\right)^N, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Das Produkt muss unendlich sein, weil sonst  $Z(s)$  nicht einen Pol bei  $s=1$  haben könnte, man kann also die  $p$  in einer unendlichen Folge anordnen. Nun beweist man die Behauptung

$$\sum_{p_j \leq x} 1 \sim \frac{1}{N} \frac{x}{\log x}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (35)$$

sowie die Behauptung

$$\sum_{p_j \leq x} \log p_j \sim \frac{1}{N} x, \quad x \rightarrow \infty, \quad (36)$$

genau gleich wie den gewöhnlichen Primzahlsatz (s.z.B.[4]). Aus (35) folgt aber Lemma 6, denn wenn  $p_j$  Norm eines Ideals in  $K_0$  ist, so erst recht Norm eines Ideals in  $K$ , also  $a(p_j) \geq 1$ . Aus (36) folgt überdies

$$\vartheta_K(x) \sim cx, \quad x \rightarrow \infty, \quad (37)$$

wobei

$$\vartheta_K(x) = \sum_{p_j \leq x} \log p_j. \quad (38)$$

#### 4. Die lineare Unabhängigkeit von $n$ -ten Wurzeln aus quadratfreien Zahlen

Besicovitch [2] bewies einen Satz über lineare Unabhängigkeit von  $n$ -ten Wurzeln aus quadratfreien ganzen Zahlen, falls man für die Wurzeln den reellen Wert wählt. Dieser Satz spielt eine wichtige Rolle in den Beweisen der  $\Omega$ -Sätze in [5], [8], [10], [15], [19], wo stets nur die reellen Wurzeln benutzt werden. Ich brauche dasselbe Resultat für gewisse komplexe Wurzeln.

LEMMA 7. *Es seien  $p_1, \dots, p_k$  paarweise verschiedene Primzahlen;  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  seien  $n$ -te (reelle oder komplexe) Wurzeln aus  $p_1, \dots, p_k$ .  $P(x_1, \dots, x_k)$  sei ein rationales*

*Polynom von höchstens  $(n-1)$ -tem Grad in jeder Variablen  $x_j$ ,  $P \neq 0$ . Dann ist auch*

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq 0.$$

Nach [2] ist dieser Satz richtig für reelle Wurzeln  $\alpha_j$ . Dies sei hier vorausgesetzt. Zum Beweise braucht man folgenden Hilfssatz:

*Es sei  $n$  eine natürliche Zahl,  $n \geq 2$ ,  $L$  ein reeller Körper,  $a$  eine Zahl aus  $L$ ,  $a > 0$ . Für alle von 1 verschiedenen Teiler  $b$  von  $n$  solle die Gleichung  $x^b - a = 0$  keine Lösung in  $L$  haben. Dann ist  $x^n - a$  irreduzibel in  $L[x]$ .*

Beweis des Hilfssatzes: Es sei

$$x^n - a = f(x)h(x),$$

$a_1$  die positive  $n$ -te Wurzel von  $a$ ,  $f(a_1) = 0$ ,  $t$  der Grad von  $f(x)$ . Da  $a_1 \notin L$ , ist  $2 \leq t \leq n$ ;  $f(x)$  sei normiert, d.h.

$$f(x) = x^t + \dots + c_0.$$

Die übrigen Wurzeln von  $f(x)$  sollen  $a_2, \dots, a_t$  heissen, also

$$f(x) = (x - a_1) \dots (x - a_t).$$

Daraus folgt  $a_1 a_2 \dots a_t \in L$ . Da  $a_j = \varepsilon_j a_1$ ,  $\varepsilon_j^n = 1$ , gilt

$$a_1 \dots a_t = a_1^t \varepsilon_1 \dots \varepsilon_t = a_1^t \varepsilon, \quad \varepsilon^n = 1.$$

Also ist  $\varepsilon$  reell, d.h.  $\varepsilon = \pm 1$ , und  $a_1^t \in L$ . Nun sei  $(n, t) = b$ ,  $yn - zt = b$  für zwei natürliche Zahlen  $y, z$ ; somit gilt

$$a_1^b (a_1^t)^z = a_1^{b+zt} = a_1^{ny} = a^y \in L.$$

Da  $a_1^t \in L$ , folgt schliesslich  $a_1^b \in L$ .  $a_1^b$  ist aber eine Wurzel von  $x^{n/b} - a = 0$ . Die Voraussetzung des Hilfssatzes ergibt dann  $n/b = 1$ ,  $n = b$ , also  $n = t$  und schliesslich  $f(x) = x^n - a$ ,  $h(x) = 1$ . Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis von Lemma 7 ist jetzt einfach. Es seien  $\beta_1, \dots, \beta_k$  die positiven  $n$ -ten Wurzeln von  $p_1, \dots, p_k$ , also

$$P(\beta_1, \dots, \beta_k) \neq 0.$$

Bekanntlich hat

$$x^b - p_1 = 0, \quad b \geq 2,$$

keine Lösung in  $\mathbf{Q}$ . Nach dem Hilfssatz ist dann  $x^n - p_1$  in  $\mathbf{Q}[x]$  irreduzibel.  $\beta_1 \rightarrow \alpha_1$

erzeugt also einen Isomorphismus  $\mathbf{Q}(\beta_1) \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha_1)$  über  $\mathbf{Q}$ . Ebenso hat

$$x^b - p_2 = 0, \quad b \geq 2, \quad b \mid n,$$

keine Lösung in  $\mathbf{Q}(\beta_1)$ , sonst wäre

$$p_2^{1/b} = \beta_2^{n/b} = f(\beta_1),$$

wo  $f$  ein rationales Polynom von höchstens  $(n-1)$ -tem Grade in  $\beta_1$  ist, also

$$g(\beta_1, \beta_2) = 0,$$

mit

$$g(x_1, x_2) = f(x_1) - x_2^{n/b}.$$

Es ist aber  $g \neq 0$ , und der Grad von  $g$  ist in  $x_1$  und  $x_2$  höchstens  $n-1$ . Das ist nicht möglich wegen der Richtigkeit von Lemma 7 für reelle Wurzeln. Nach dem Hilfssatz ist also  $x^n - p_2$  irreduzibel in  $\mathbf{Q}(\beta_1)[x]$ . Daraus folgt, dass  $\beta_1 \rightarrow \alpha_1, \beta_2 \rightarrow \alpha_2$  einen Isomorphismus  $\mathbf{Q}(\beta_1, \beta_2) \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)$  über  $\mathbf{Q}$  erzeugt. Auf diese Weise fortfahrend, erhält man durch  $\beta_1 \rightarrow \alpha_1, \dots, \beta_k \rightarrow \alpha_k$  einen Isomorphismus  $\mathbf{Q}(\beta_1, \dots, \beta_k) \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  über  $\mathbf{Q}$ , woraus die Behauptung folgt (da sie ja für  $\beta_1, \dots, \beta_k$  anstelle von  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  richtig ist). (Die hier benötigte Algebra findet man in [21], 5. Kap.)

## 5. Die Funktion $\tilde{\eta}(x)$

Nun sei ein  $x > 1$  fest vorgegeben;  $p_1, \dots, p_k$  seien die  $k$  Primzahlen aus der Folge  $p_1, p_2, \dots$  in Lemma 6, welche kleiner als  $x$  sind.  $1 = q_1, q_2, q_3, \dots, q_h$  seien die  $h = 2^k$  quadratfreien ganzen Zahlen mit Primteilern aus  $p_1, \dots, p_k$ . Wir suchen eine untere Abschätzung für  $\tilde{\eta}(x)$ , wo

$$\tilde{\eta}(x) = \inf \left\{ \eta \mid \eta = \left| m^{1/n} + \sum_{j=1}^h r_j q_j^{1/n} \right|, \quad r_j = 0, \pm 1, \right. \\ \left. \sum_{j=1}^h r_j^2 \geq 2, \quad m = 1, 2, \dots \right\}. \quad (39)$$

Wegen Lemma 7 sind alle  $\eta$  von 0 verschieden, und wie in [10] zeigt man, dass  $1 > \tilde{\eta}(x) > 0$ , ferner dass das Infimum erreicht wird, d.h. dass ein  $\eta_0$  existiert mit  $\eta_0 = \tilde{\eta}(x)$ . Wenn dann

$$\eta_0 = \left| m_0^{1/n} + \sum_{j=1}^h r_j q_j^{1/n} \right|, \quad (39')$$

zeigt man noch, dass

$$m_0 \leq \left( \sum_{j=1}^h q_j^{1/n} + 1 \right)^n. \quad (40)$$

Es ist

$$\log q_j \leq \log q_h = \sum_{i=1}^k \log p_i = \vartheta_K(x) \leq c_1 x, \quad (41)$$

wegen (37) und (38), also

$$m_0 \leq (he^{c_2 x})^n = e^{c_3 x + c_4 k} \leq e^{c_5 x}, \quad (42)$$

da nach Lemma 6  $k \leq c_6 x / \log x$ . Es sei  $\mu$  die Anzahl verschiedener Primteiler von  $m_0$ ,  $2 = p'_1, p'_2, \dots$  die Folge aller Primzahlen. Dann ist

$$m_0 \geq p'_1 p'_2 \dots p'_\mu = \exp \left( \sum_{j=1}^{\mu} \log p'_j \right) = \exp(\vartheta(p'_\mu)) = r(\mu),$$

wo  $\vartheta(x)$  eine der arithmetischen Funktionen von Tschebischeff bedeute. Für diese gilt  $\vartheta(x) \sim x$ , wenn  $x \rightarrow \infty$  (s. [4], S. 64 ff, S. 128). Es ist

$$\log r(\mu) = \vartheta(p'_\mu) \sim p'_\mu \sim \mu \log \mu, \quad \mu \rightarrow \infty,$$

$$\log \log r(\mu) \sim \log \mu, \quad \mu \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\log r(\mu)}{\log \log r(\mu)} \sim \mu, \quad \mu \rightarrow \infty.$$

Für  $\mu \geq \mu_0$  folgt dann

$$\frac{\log m_0}{\log \log m_0} \geq \frac{\log r(\mu)}{\log \log r(\mu)} \geq \frac{1}{2} \mu.$$

Also, mit (42),

$$\mu \leq c_9 \frac{\log m_0}{\log \log m_0} \leq c_{10} \frac{x}{\log x}, \quad (43)$$

für  $x > x_0$ . Nun kann man (39') schreiben als

$$\tilde{\eta}(x) = \eta_0 = F(P_1^{1/n}, \dots, P_N^{1/n}), \quad (44)$$

wo  $P_1, \dots, P_N$  verschiedene Primzahlen sind,  $F \neq 0$  ein Polynom in  $N$  Variablen mit ganzen rationalen Koeffizienten, vom Grade  $\leq n-1$  in jeder Variablen,

$F = F(x_1, \dots, x_N)$ . Ferner ist

$$N \leq k + \mu \leq c_{11} \frac{x}{\log x}.$$

Wir definieren

$$F_0 = \prod_{\substack{(k_1, \dots, k_N) \\ k_j \bmod n}} F(\varepsilon^{k_1} x_1, \dots, \varepsilon^{k_N} x_N),$$

$\varepsilon = \exp(2\pi i/n)$ .  $F_0$  ist ein Polynom in  $x_1, \dots, x_N$ , mit ganzen Koeffizienten aus dem  $n$ -ten Kreisteilungskörper. Übt man auf  $F_0$  einen der  $\varphi(n)$  Automorphismen  $\tau: \varepsilon \rightarrow \varepsilon^r$ ,  $(r, n) = 1$ , aus, erhält man

$$\begin{aligned} \tau F_0 &= \prod_{\substack{(k_1, \dots, k_N) \\ k_j \bmod n}} F(\varepsilon^{rk_1} x_1, \dots, \varepsilon^{rk_N} x_N) \\ &= \prod_{\substack{(m_1, \dots, m_N) \\ m_j \bmod n}} F(\varepsilon^{m_1} x_1, \dots, \varepsilon^{m_N} x_N) = F_0. \end{aligned}$$

Also ist  $F_0$  in  $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_N]$ . Ähnlich sieht man, dass  $F_0$  sich nicht ändert, falls ein  $x_j$  durch  $\varepsilon x_j$  ersetzt wird. Somit ist  $F_0$  nur von den  $n$ -ten Potenzen von  $x_j$  abhängig,

$$\begin{aligned} F_0(x_1, \dots, x_N) &= F_1(x_1^n, \dots, x_N^n), \\ |F_0(P_1^{1/n}, \dots, P_N^{1/n})| &= |F_1(P_1, \dots, P_N)| \geq 1, \end{aligned}$$

da der Ausdruck links nach Lemma 7 nicht verschwindet und zudem ganz rational ist. Nun verfährt man wie in [10] und [8] und erhält:

$$\log \frac{1}{\tilde{\eta}(x)} \leq \exp\left(c \frac{x}{\log x}\right) \quad \text{für } x \geq p_1, \quad (45)$$

mit einem  $c > 0$ .

## 6. Der Beweis von Satz 1

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich der Beweis von Satz 1 genau wie in [8] und [10] durchführen. Wir definieren

$$Q(x) = \exp\left(a \frac{x}{\log x}\right), \quad (46)$$

wobei  $a > 0$  und  $a$  so gewählt ist, dass

$$\frac{1}{\tilde{\eta}(x)} \leq Q(x) \quad (47)$$

und

$$h = 2^k \leq \exp\left(\frac{1}{2}a \frac{x}{\log x}\right), \quad k = \sum_{p_j \leq x} 1. \quad (48)$$

Ferner sei

$$\sigma_x = e^{-2Q(x)}, \quad (49)$$

$$\theta_x = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{Q(x)}. \quad (50)$$

Mit

$$V(\xi) = 1 + \frac{1}{2} e^{i\xi} + \frac{1}{2} e^{-i\xi} = 2(\cos \frac{1}{2}\xi)^2, \quad \alpha = \pi \frac{r_1 - 3}{4},$$

definieren wir

$$T_x(u) = \prod_{j=1}^h V(Dq_j^{1/n}u + \alpha), \quad x \geq p_1. \quad (51)$$

Es ist sicher

$$T_x(u) \geq 0 \quad \text{für reelles } u.$$

Für ein trigonometrisches Polynom  $T(u) = \sum_{v=1}^r c_v e^{-i\alpha_v u}$ ,  $\alpha_v, u$  reell,  $c_v$  komplex, und für eine in  $\text{Res} > 0$  definierte komplexe Funktion  $H(s)$  bedeute  $T \wedge H$  folgende Funktion:

$$T \wedge H(\sigma) = \sum_{v=1}^r c_v H(\sigma + i\alpha_v), \quad \sigma > 0.$$

Weiter sei

$$\gamma_x = \sup_{u>0} \frac{P_K(u^n)}{u^{\theta_x}} = \sup_{u>0} \left( \frac{P_K(u^n)}{u^{\left(\frac{1}{Q(x)} + \frac{n-1}{2}\right)}} \right). \quad (52)$$

Wegen (9) ist

$$\gamma_x > 0. \quad (53)$$

Für  $u < 1$  ist  $P_K(u^n) = O(u^n)$  und, für  $x \geq x_0$ ,  $\theta_x \leq \frac{1}{2}n$ , also

$$P_K(u^n) u^{-\theta_x} = O(1) \quad \text{für } u \rightarrow 0.$$

Daher ist, falls  $\gamma_x = \infty$ ,  $P_K(u) = \Omega_+(u^{\theta_x/n})$ , was viel stärker ist als die  $\Omega_+$ -Behauptung



in Satz 1. Wir können daher  $\gamma_x < \infty$  annehmen. Dann ist

$$\gamma_x u^{\theta_x} - P_K(u^n) \geq 0 \quad \text{für } u \geq 0,$$

also, wegen  $T_x(u) \geq 0$ ,

$$J_x = \sigma_x^{(n+1)/2} \int_0^\infty (\gamma_x u^{\theta_x} - P_K(u^n)) e^{-\sigma_x u} T_x(u) du \geq 0. \quad (54)$$

Andererseits rechnet man leicht aus, dass

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sigma_x^{(n+1)/2} \gamma_x \Gamma(\theta_x + 1) T_x \wedge I_{\theta_x+1}(\sigma_x) - \\ &\quad - \sigma_x^{(n+1)/2} \zeta_K(0) T_x \wedge I_1(\sigma_x) - \sigma_x^{(n+1)/2} T_x \wedge g(\sigma_x), \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

wobei für reelles  $\beta$  und für  $\text{Re } s > 0$  gelte:  $I_\beta(s) = s^{-\beta}$ .  $g(s)$  ist die durch (11) definierte Funktion. Als nächstes müssen wir die Summanden in (55) genauer untersuchen. Zu diesem Zwecke wird  $T_x(u)$  in vier Summanden zerlegt:

$$\left. \begin{aligned} T_x &= T_{x,0} + T_{x,1} + \bar{T}_{x,1} + T_{x,2}, \\ T_{x,0} &\equiv 1, \quad T_{x,1}(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^h e^{+ia} e^{+iDq_j^{1/n}u}, \\ \bar{T}_{x,1}(u) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^h e^{-ia} e^{-iDq_j^{1/n}u} = \overline{T_{x,1}(u)}, \\ T_{x,2}(u) &= \sum_{j=1}^N b_m e^{-i\beta_m u}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

wobei

$$N = 3^h - 2h - 1. \quad (57)$$

Die  $b_m$  sind komplexe Zahlen mit  $|b_m| \leq \frac{1}{4}$ , die  $\beta_m$  reelle Zahlen der Form

$$\beta_m = D \sum_{j=1}^h r_{m,j} q_j^{1/n}; \quad r_{m,j} = 0, \pm 1, \quad \sum_{j=1}^h r_{m,j}^2 \geq 2.$$

Aus der Definition (39) von  $\tilde{\eta}(x)$  und aus (45) folgt

$$\begin{aligned} |\beta_v \pm Dm^{1/n}| &\geq D\tilde{\eta}(x) \geq De^{-Q(x)}, \quad v = 1, \dots, N; \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (58)$$

Wir beweisen jetzt

$$T_x \wedge I_\beta(\sigma) - \sigma^{-\beta} = O(3^h e^{nQ(x)}) \quad (59)$$

für  $\sigma > 0, 0 \leq \beta \leq n, x \geq p_1$ . Denn es ist

$$T_{x,0} \wedge I_\beta(\sigma) - \sigma^{-\beta} = 0, \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} |T_{x,1} \wedge I_\beta(\sigma)| &= \frac{1}{2} \left| \sum_{j=1}^h e^{i\alpha} (\sigma - iDq_j^{1/n})^{-\beta} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} D^{-\beta} \left| \sum_{j=1}^h q_j^{-\beta/n} \right| = O(h). \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Analog gilt

$$\bar{T}_{x,1} \wedge I_\beta(\sigma) = O(h). \quad (62)$$

Schliesslich ist

$$\left. \begin{aligned} |T_{x,2} \wedge I_\beta(\sigma)| &= \left| \sum_{m=1}^N b_m (\sigma + i\beta_m)^{-\beta} \right| \leq \frac{1}{4} \sum_{m=1}^N |\beta_m|^{-\beta} \\ &= O(Ne^{\beta Q(x)}) = O(3^h e^{nQ(x)}) \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

wegen (57) und (58). Durch Addition von (60) bis (63) ergibt sich (59). Nun beweisen wir

LEMMA 8. Für  $x \rightarrow \infty$  ist

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_{\theta_x+1}(\sigma_x)\} = e^2 + o(1) \quad (64)$$

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_1(\sigma_x)\} = o(1) \quad (65)$$

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge g(\sigma_x)\} = B_0 \sum_{j=1}^{h(x)} \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + o(1). \quad (66)$$

*Bemerkung.*  $h=h(x)$ ; die Numerierung der  $q_j$  wechselt, wenn sich  $x$  ändert; wesentlich ist, dass es sich in der Summe in (66) um jene quadratfreien ganzen Zahlen handelt, welche sich aus den  $p_j \leq x$  bilden lassen, wo  $p_1, p_2, \dots$  die Folge aus Lemma 6 bedeutet.

Beweis von (64):

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_{\theta_x+1}(\sigma_x)\} &= \sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_{\theta_x+1}(\sigma_x) - \sigma_x^{-\theta_x-1}\} + \sigma_x^{(n+1)/2-\theta_x-1} \\ &= O(\sigma_x^{(n+1)/2} 3^h e^{nQ(x)}) + \sigma_x^{-1/Q(x)} \end{aligned}$$

wegen (59), da  $\theta_x+1 \leq n$  für  $x \geq x_0$ ; also, mit (49):

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_{\theta_x+1}(\sigma_x)\} = e^2 + O(3^h e^{-Q(x)}) = e^2 + o(1).$$

Denn nach (48) ist  $h \log 3 = O(Q(x)^{1/2})$ .

Der Beweis von (65) verläuft gleich:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_1(\sigma_x)\} &= \sigma_x^{(n-1)/2} + \sigma_x^{(n+1)/2} \{T_x \wedge I_1(\sigma_x) - \sigma_x^{-1}\} \\ &= o(1) + o(1).\end{aligned}$$

Beweis von (66): Wegen  $g(\sigma_x) = O(1)$  für  $\sigma_x \rightarrow 0$  ist:

$$\sigma_x^{(n+1)/2} T_{x,0} \wedge g(\sigma_x) = \sigma_x^{(n+1)/2} g(\sigma_x) = O(\sigma_x^{(n+1)/2}) = o(1). \quad (67)$$

Ferner ist

$$\sigma_x^{(n+1)/2} T_{x,1} \wedge g(\sigma_x) = \frac{1}{2} e^{i\alpha} \sum_{j=1}^h \sigma_x^{(n+1)/2} g(\sigma_x - iq_j^{1/n} D).$$

Durch Anwendung von Lemma 4 mit  $Y = q_h^{1/n}$  ergibt sich

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_{x,1} \wedge g(\sigma_x)\} &= \frac{1}{2} e^{i\alpha - i\pi((r_1-3)/4)} B_0 \sum_{j=1}^h \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + O(\sigma_x^{1/4} h q_h^{4/n}) \\ &= \frac{1}{2} B_0 \sum_{j=1}^h \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + O(e^{-\frac{1}{2}Q(x)} e^{c_1 x / \log x + c_2 x}) \\ &= \frac{1}{2} B_0 \sum_{j=1}^h \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + o(1)\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

wegen (41) und weil  $h = 2^k$ ,  $k = O(x/\log x)$ , nach Lemma 6. Ebenso ist

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{\bar{T}_{x,1} \wedge g(\sigma_x)\} = \frac{1}{2} B_0 \sum_{j=1}^h \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + o(1). \quad (69)$$

Schliesslich ist

$$\sigma_x^{(n+1)/2} \{T_{x,2} \wedge g(\sigma_x)\} = \sigma_x^{(n+1)/2} \sum_{j=1}^N b_j g(\sigma_x + i\beta_j). \quad (70)$$

Nun ist, nach (58),

$$|\sigma_x + i\beta_j \pm \text{Dim}^{1/n}| \geq |\beta_j \pm Dm^{1/n}| \geq D e^{-Q(x)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

und für  $x \geq x_0$ ,

$$|\sigma_x + i\beta_j| \leq \sigma_x + h q_h^{1/n} \leq 2 h q_h^{1/n}.$$

Nun lässt sich auf (70) Lemma 5 anwenden mit  $\omega = De^{-Q(x)}$ ,  $k = 2hq_h^{1/n}$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{(n+1)/2} \{T_{x,2} \wedge g(\sigma_x)\} &= O(\sigma_x^{(n+1)/2} h^A q_h^{A/n} e^{((n+1)/2)Q(x)} N) \\ &= O(e^{-((n+1)/2)Q(x)} e^{h \log 3} h^A q_h^{A/n}) \\ &= O(e^{-((n+1)/2)Q(x) + c(Q(x))^{1/2}} e^{c_1 x / \log x + c_2 x}) \\ &= o(1) \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

mit gleichen Überlegungen wie weiter unten. Aus (67), (68), (69) und (71) erhält man (66) durch Addition.

Setzt man nun in (55) die Abschätzung von Lemma 8 ein, erhält man wegen (54):

$$(e^2 + o(1)) \gamma_x \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{Q(x)}\right) \geq B_0 \sum_{j=1}^h \frac{a(q_j)}{q_j^{(n+1)/2n}} + o(1). \quad (72)$$

Da  $Q(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , und  $a(m)a(n) = a(nm)$  für  $(n, m) = 1$ , folgt

$$e^2 \gamma_x \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) (1 + o(1)) \geq B_0 \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{a(p_j)}{p_j^{(n+1)/2n}}\right) + o(1).$$

Da  $a(p_j) \geq 1$ , ergibt dies mit  $C > 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &\geq C \exp\left(\sum_{j=1}^k \log\left(1 + \frac{a(p_j)}{p_j^{(n+1)/2n}}\right)\right) \geq C \exp\left(\sum_{j=1}^k \log(1 + p_j^{-(n+1)/2n})\right) \\ &\geq C \exp\left(\sum_{j=1}^k (p_j^{-(n+1)/2n} - \tfrac{1}{2} p_j^{-(n+1)/n})\right) \geq C_1 \exp\left(\sum_{j=1}^k p_j^{-(n+1)/2n}\right) \\ &\geq C_2 \exp\left(c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}\right), \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

da  $p_j \sim c_4 j \log j$  für  $j \rightarrow \infty$ , und  $k \sim c_5 x / \log x$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Sei nun  $u_x$  so gewählt, dass

$$P_K(u_x^n) u_x^{-\theta_x} \geq \tfrac{1}{2} \gamma_x,$$

was wegen der Definition von  $\gamma_x$  möglich ist (s. (52), (53)), also folgt aus (73):

$$P_K(u_x^n) u_x^{-\theta_x} \geq \tfrac{1}{2} C_2 \exp\left(c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}\right).$$

Die rechte Seite geht gegen  $\infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , also auch  $u_x$ , und es gilt

$$P_K(u_x^n) / u_x^{(n-1)/2} \geq c_6 \exp\left(c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x} + \frac{\log u_x}{Q(x)}\right). \quad (74)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

a)

$$\frac{\log u_x}{Q(x)} \leq c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}.$$

Durch Logarithmieren ergibt dies für  $x \geq x_0$ :

$$\log \log u_x \leq c_7 \frac{x}{\log x},$$

und schliesslich, da  $y^\beta \log^\alpha y$  für grosse  $y$  eine monotone Funktion ist:

$$c_7 \frac{(\log \log u_x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log u_x)^{(n+1)/2n}} \leq c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}. \quad (75)$$

b)

$$\frac{\log u_x}{Q(x)} \geq c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}. \quad (76)$$

Ferner sei

$$\frac{(\log \log u_x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log u_x)^{(n+1)/2n}} \geq \frac{\log u_x}{Q(x)}, \quad (77)$$

ansonsten Satz 1 bewiesen wäre. Zweimaliges Logarithmieren von (76) ergibt

$$\log \log \log u_x \geq c_8 \log x,$$

einmaliges Logarithmieren von (77) dagegen:

$$\log \log u_x \leq c_9 \frac{x}{\log x},$$

immer für hinreichend grosses  $x$ . Aus den beiden letzten Ungleichungen schliesst man:

$$c_{10} \frac{(\log \log u_x)^{(n-1)/2n}}{(\log \log \log u_x)^{(n+1)/2n}} \leq c_3 \frac{x^{(n-1)/2n}}{\log x}. \quad (78)$$

Mit (78), (75) und (74) ist die  $\Omega_+$ -Behauptung des Satzes 1 bewiesen, da  $u_x \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Der Beweis für  $\Omega_-$  geht ganz gleich vor sich, mit angepasstem  $\alpha$  und  $\gamma_x$ . Damit ist Satz 1 bewiesen.

*Bemerkung.* Ein einfaches Beispiel für einen kubischen totalreellen Körper ist folgendes:

Es sei  $p$  eine Primzahl,  $m$  und  $k$  natürliche Zahlen, welche folgenden Bedingungen genügen:  $1 \leq k < m$ ,  $(k, p) = 1$ . Ferner sei  $f(x) = x^3 - mpx + kp$ . Wegen  $f(1) < 0$ ,  $f(-1) > 0$  hat  $f(x)$  drei reelle Nullstellen. Nach dem Kriterium von Eisenstein ist ausserdem  $f(x)$  irreduzibel über  $\mathbf{Q}$  (s. [21], § 27); falls  $\xi$  eine Nullstelle von  $f(x)$  ist, so ist  $\mathbf{Q}(\xi)$  kubisch und total-reell.

## 7. Eine Ungleichung für $\sum_{m \leq x} |\tau(m)|$

Der Beweis von Satz 2 verläuft nach den gleichen Prinzipien wie jener von Satz 1. Man kennt aber kein Lemma 6 entsprechendes Ergebnis. Als Ersatz dient Formel (8) in Satz 3:

$$\sum_{m \leq x} |\tau(m)| > cx^{25/4} \quad \text{für } x \geq 1, \quad (79)$$

mit einem  $c > 0$ . Andererseits weiss man ([11], S.173), dass

$$\sum_{m \leq x} |\tau(m)| = O(x^{13/2}) \quad \text{für } x \geq 1. \quad (80)$$

Der Beweis von Satz 3 ergibt sich aus folgendem

**LEMMA 9.** *Es gibt zwei positive Zahlen  $c_1, c_2$  derart, dass zu jedem  $y \geq 1$  zwei reelle Zahlen  $y_1, y_2$  existieren mit folgenden Eigenschaften:*

$$y \leq y_j \leq y + c_1 y^{1/2}, \quad j = 1, 2;$$

$$S(y_1) = \sum_{m \leq y_1} \tau(m) \geq c_2 y_1^{23/4},$$

$$S(y_2) = \sum_{m \leq y_2} \tau(m) \leq -c_2 y_2^{23/4}.$$

Daraus ergibt sich nun (79) folgendermassen: Es seien  $c_1$  und  $c_2$  die beiden Konstanten aus Lemma 9. Wir setzen

$$c_3 = \max\left(1, \frac{c_1^2}{4}\right),$$

$$y(k) = c_3 k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Es ist

$$y(k) \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

ferner

$$y(k+1) - y(k) = 2c_3k + c_3 > 2c_3^{1/2}y(k)^{1/2} \geq c_1y(k)^{1/2}.$$

Dann folgt aus Lemma 9

$$\begin{aligned} \sum_{y(k) < m \leq y(k+1)} |\tau(m)| &\geq 2c_2y(k)^{23/4} \\ \sum_{m \leq x} |\tau(m)| &\geq \sum_{y(k+1) \leq x} \sum_{y(k) < m \leq y(k+1)} |\tau(m)| \\ &\geq \sum_{c_3(k+1)^2 \leq x} 2c_2c_3^{23/4}k^{23/2} \\ &\geq c_4 \sum_{k \leq c_5x^{1/2}} k^{23/2} \geq c_6x^{25/4}, \quad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Beweis von Lemma 9 (vgl. [18]): Es sei für  $\varrho \geq 0, x > 0$ :

$$S_\varrho(x) = \sum_{m \leq x} \tau(m) (x-m)^\varrho \frac{1}{\Gamma(\varrho+1)}.$$

Dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$S_{\varrho+1}(x) = \int_0^x S_\varrho(t) dt. \quad (81)$$

Ferner ist für  $\varrho > 0$ :

$$S_\varrho(x) = (2\pi)^{-\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x}{m}\right)^{6+\varrho/2} \tau(m) J_{12+\varrho}\{4\pi(mx)^{1/2}\}, \quad (82)$$

wo  $J_\nu$  die Besselsche Funktion erster Art  $\nu$ -ter Ordnung ist, s.[7], (55). Nach [9], Bd. II, S.85, ist für  $z \geq 1$ :

$$J_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{-1/2} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/4}). \quad (83)$$

Aus (80) folgt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\tau(m)|}{m^7} = c_3 < \infty, \quad (84)$$

und daraus weiter

$$\sum_{m=2}^{\infty} |\tau(m)| m^{-25/4-\varrho/2} \leq c_3 2^{3/4-\varrho/2} \leq \frac{2^{1/2}}{8}, \quad (85)$$

falls  $\varrho \geq \varrho_0$ , wo  $\varrho_0$  eine genügend grosse natürliche Zahl ist. Nun ist für  $\varrho \geq 1$  wegen (82), (83) und (84):

$$\left. \begin{aligned} S_{\varrho}(x) &= c_{\varrho} x^{23/4 + \varrho/2} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4 + \varrho/2}} \cos(4\pi(m x)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \right. \\ &\quad \left. + O\left(x^{-1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\tau(m)|}{m^{27/4 + \varrho/2}}\right) \right\} \\ &= c_{\varrho} x^{23/4 + \varrho/2} \{U_{\varrho}(x) + R_{\varrho}(x)\}, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

wo die  $c_{\varrho}$  positive, von  $\varrho$  abhängige Konstanten sind, und

$$R_{\varrho}(x) = O(x^{-1/2}). \quad (87)$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$|R_{\varrho}(x)| \leq \frac{2^{1/2}}{8} \quad \text{für } x \geq x_0; \quad \varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3; \quad (88)$$

für ein bestimmtes  $x_0 \geq 1$ . Nun seien  $k_1, k_2$  derart gewählt, dass für  $x \geq x_0$  gelte

$$S(y) \leq k_2 y^{23/4} \quad \text{für } x \leq y \leq x + k_1 x^{1/2} = x + h. \quad (89)$$

Ich zeige, dass für ein gewisses grosses  $k_1$  eine positive, von  $x$  nicht abhängige Konstante  $c_4$  existiert, derart dass  $k_2 \geq c_4 > 0$ .

Unter den vier Zahlen  $\varrho = \varrho_0, \varrho_0 + 1, \varrho_0 + 2, \varrho_0 + 3$  erfüllt bei gegebenem  $x$  sicher eine die Bedingung

$$\cos(4\pi(x+h)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \geq \frac{2^{1/2}}{2}.$$

Dann ist wegen (85), (86) und (88), und weil  $\tau(1) = 1$ :

$$\left. \begin{aligned} S_{\varrho}(x+h) &= c_{\varrho}(x+h)^{23/4 + \varrho/2} \left\{ \cos(4\pi(x+h)^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tau(m)}{m^{25/4 + \varrho/2}} \cos(4\pi(m(x+h))^{1/2} - \frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\varrho) + R_{\varrho}(x) \right\} \\ &\geq c_{\varrho}(x+h)^{23/4 + \varrho/2} \left( \frac{1}{2} 2^{1/2} - \frac{2^{1/2}}{8} - \frac{2^{1/2}}{8} \right) \\ &= \frac{2^{1/2}}{4} c_{\varrho}(x+h)^{23/4 + \varrho/2}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$



Aus (89) folgt

$$S(y) \leq k_2 (x+h)^{23/4} \quad \text{für } x \leq y \leq x+h.$$

Diese Ungleichung wird integriert:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_x^{x+h} dy \int_{x+h-(x+h-y)/\varrho}^{x+h} dy_1 \times \\ &\times \int_{y_1-(x+h-y)/\varrho}^{y_1} dy_2 \dots \int_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho) dy_\varrho \\ &\leq B = k_2 (x+h)^{23/4} \int_x^{x+h} dy \dots \int_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} dy_\varrho, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

denn

$$\begin{aligned} x+h &\geq y_\varrho \geq y_{\varrho-1} - \frac{x+h-y}{\varrho} \geq y_{\varrho-2} - 2 \frac{x+h-y}{\varrho} \dots \geq y_1 - (\varrho-1) \frac{x+h-y}{\varrho} \\ &\geq x+h - \varrho \frac{x+h-y}{\varrho} = y \geq x. \end{aligned}$$

Für das Integral  $B$  gilt:

$$B = k_2 (x+h)^{23/4} \int_x^{x+h} \left( \frac{x+h-y}{\varrho} \right)^\varrho dy = k_2 (x+h)^{23/4} \left( \frac{h}{\varrho} \right)^\varrho \frac{h}{1+\varrho}. \quad (92)$$

Für das Integral  $A$  gilt, wegen (81):

$$\begin{aligned} &\int_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho) dy_\varrho = S_1(y_{\varrho-1}) - S_1\left(y_{\varrho-1} - \frac{x+h-y}{\varrho}\right), \\ &\int_{y_{\varrho-2}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-2}} dy_{\varrho-1} \int_{y_{\varrho-1}-(x+h-y)/\varrho}^{y_{\varrho-1}} S(y_\varrho) dy_\varrho \\ &= S_2(y_{\varrho-2}) - 2S_2\left(y_{\varrho-2} - \frac{x+h-y}{\varrho}\right) + S_2\left(y_{\varrho-2} - 2 \frac{x+h-y}{\varrho}\right) \end{aligned}$$

und so fort, bis

$$\begin{aligned}
 A &= \int_x^{x+h} \sum_{m=0}^q \binom{q}{m} (-1)^m S_q \left( x + h - m \frac{x+h-y}{q} \right) dy \\
 &= h S_q(x+h) + \sum_{m=1}^q \binom{q}{m} (-1)^m \frac{q}{m} \\
 &\quad \times \left( S_{q+1}(x+h) - S_{q+1} \left( x + \left( 1 - \frac{m}{q} \right) h \right) \right)
 \end{aligned} \tag{93}$$

Nun folgt aus (82), (83) und (84):

$$|S_{q+1}(y)| \leq c_5 y^{25/4+q/2}, \quad y \geq 1 \tag{94}$$

mit einem  $c_5 > 0$ . Da ferner

$$\sum_{m=1}^q \left| \binom{q}{m} (-1)^m \frac{q}{m} \right| \leq q 2^q,$$

erhalten wir aus (91) bis (94):

$$B = \frac{k_2 q^{-q}}{q+1} h^{q+1} (x+h)^{23/4} \geq h S_q(x+h) - c_5 q 2^{q+1} (x+h)^{25/4+q/2},$$

und, wenn man  $h = k_1 x^{1/2}$  sowie (90) einsetzt:

$$\begin{aligned}
 &\frac{k_2 q^{-q}}{q+1} k_1^{q+1} x^{(q+1)/2} (x + k_1 x^{1/2})^{23/4} \\
 &\geq k_1 x^{1/2} \frac{2^{1/2}}{4} c_q (x + k_1 x^{1/2})^{23/4+q/2} - c_5 q 2^{q+1} (x + k_1 x^{1/2})^{25/4+q/2} \\
 &\frac{k_2 k_1^{1+q}}{q^q (1+q)} \geq (1 + k_1 x^{-1/2})^{q/2} \left( \frac{2^{1/2}}{4} c_q k_1 - c_5 q 2^{q+1} (1 + k_1 x^{-1/2}) \right) \\
 &\geq \left( k_1 \left( \frac{2^{1/2}}{4} c_q - c_5 q 2^{q+1} x^{-1/2} \right) - c_5 q 2^{q+1} \right).
 \end{aligned}$$

Falls man nun  $x_0$  und damit  $x$  gross genug wählt, ergibt sich

$$\frac{k_2 k_1^{1+q}}{q^q (1+q)} \geq (\frac{1}{4} k_1 c_q - c_5 q 2^{q+1}),$$

und weiter für genügend grosses  $k_1$ :

$$k_2 k_1^{1+q} \geq q^q (q+1).$$

Für jedes  $x \geq x_0$  muss nun eine solche Ungleichung erfüllt sein, wobei  $q$  eine der vier Zahlen  $q_0, q_0+1, q_0+2, q_0+3$  sein muss. Also

$$k_2 \geq \min_{0 \leq j \leq 3} \frac{(q_0+j)^{q_0+1+j}}{k_1^{q_0+1+j}} = c_4 > 0.$$

Somit ist die erste Ungleichung in Lemma 9 für  $y \geq x_0$  mit  $c_1 = k_1, c_2 = \frac{1}{2}c_4$  bewiesen. Wählt man nun  $c_1$  noch einmal etwas grösser, so stimmt die Behauptung für alle  $y \geq 1$ . Die zweite Ungleichung wird gleich bewiesen.

### KOROLLAR ZU SATZ 3.

$$\sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} \geq c' \log x. \quad (95)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}} &= \frac{\sum_{m \leq x} |\tau(m)|}{x^{25/4}} + \frac{25}{4} \int_1^x \sum_{m \leq t} |\tau(m)| t^{-29/4} dt \\ &\geq c + \frac{25}{4} c \int_1^x \frac{dt}{t} \geq c' \log x. \end{aligned}$$

## 8. Der Beweis von Satz 2

Der Beweis von Satz 2 lässt sich nun wie der von Satz 1 durchführen. Es ist für  $\text{Re } s > 0$  (s. [19], Lemma 1, oder [7], (56)):

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{1}{s} \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) e^{-sm^{1/2}} = B \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau(m)}{(s^2 + 16\pi^2 m)^{25/2}}, \\ B &= \Gamma(25/2) 2^{36} \pi^{23/2}. \end{aligned} \quad (96)$$

Für  $g_1(s)$  gelten zu Lemma 4 und 5 analoge Aussagen. Es sei  $B_0 = B(8\pi)^{-25/2}$ . Dann

gilt:

$$\sigma^{25/2} g(\sigma \pm 4\pi m^{1/2} i) = B_0 e^{\pm i\pi/4} \frac{\tau(m)}{m^{25/4}} + O(\sigma y^{13/2})$$

$$\text{für } 0 < \sigma < 1, \quad 1 \leq m \leq Y.$$

Ferner

$$g(s) = O(\omega^{-25/2} k^{23/2}) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0, |s| < k, k \geq 1,$$

$$|s \pm 4\pi m^{1/2} i| > \omega, \quad m = 1, 2, \dots$$

Für  $p_1, p_2, \dots$  wählt man jetzt die Folge aller Primzahlen. Wie im vorigen Beweise definiert man anhand dieser Folge die Funktionen  $\tilde{\eta}(x)$ ,  $Q(x)$  und  $\sigma_x$ , ferner

$$\theta_x = \frac{23}{2} + \frac{1}{Q(x)}$$

und für reelles  $u$

$$T_x(u) = \sum_{j=1}^h V(4\pi q_j^{1/2} u + \alpha_{q_j}),$$

mit

$$\alpha_q = -\frac{\pi}{4} \quad \text{für } \tau(q) \geq 0$$

$$\alpha_q = +\frac{3}{4}\pi \quad \text{für } \tau(q) < 0.$$

Mit

$$\gamma_x = \sup_{u>0} \frac{S(u^2)}{u^{\theta_x}}$$

erhält man dann nach gleicher Rechnung wie in Abschnitt 6:

$$\begin{aligned} \gamma_x &\geq c \sum_{j=1}^h \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}}, \\ S(u_x^2) u_x^{-\theta_x} &\geq c_1 \sum_{j=1}^h \frac{|\tau(q_j)|}{q_j^{25/4}} = \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{|\tau(p)|}{p^{25/4}}\right) \\ &\geq c_2 \sum_{m \leq x} \frac{|\tau(m)|}{m^{25/4}}. \end{aligned}$$

wegen  $\tau(mn) = \tau(m) \tau(n)$  für  $(m, n) = 1$  (s. [11], S. 161). Für die letzte Ungleichung siehe den Beweis von Lemma 2 in [19].

Aus (95) folgt dann, mit  $u_x \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ :

$$S(u_x^2) u_x^{-23/2} \geq c_4 u_x^{1/Q(x)} \log x.$$

Falls nun  $\log \log \log u_x \geq u_x^{1/Q(x)}$ , gilt

$$\log u_x \leq Q(x) \log \log \log \log u_x = \exp\left(c_5 \frac{x}{\log x}\right) \log \log \log \log u_x$$

$$\log \log u_x \leq c_6 \frac{x}{\log x}$$

$$\log \log \log u_x \leq \log x \quad \text{für } x > x_0.$$

Also ist jedenfalls

$$\frac{S(u_x^2)}{u_x^{23/2}} \geq c_7 \log \log \log u_x,$$

womit, wegen  $u_x \rightarrow \infty$ , Satz 2 für den  $\Omega_+$ -Fall bewiesen ist. Dasselbe Verfahren führt zur  $\Omega_-$ -Behauptung.

## REFERENZEN

- [1] BERNDT, B. C., *A note on the number of integral ideals of bounded norm in a quadratic number field*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 1283–85.
- [2] BESICOVITCH, A. S., *On the linear independence of fractional powers of integers*, J. London Math. Soc. 15 (1940), 3–6.
- [3] BIEBERBACH, L., *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, (Springer, Berlin, 1965).
- [4] CHANDRASEKHARAN, K., *Introduction to Analytic Number Theory*, (Springer, Berlin, 1968).
- [5] CHANDRASEKHARAN, K. and RAGHAVAN NARASIMHAN, *Functional equations with multiple Gamma factors and the average order of arithmetical functions*, Ann. of Math. 76 (1962), 93–136.
- [6] ———, *The approximate functional Equation for a class of zeta functions*, Math. Annalen 152 (1963), 30–64.
- [7] ———, *Hecke's functional equation and arithmetical identities*, Ann. of Math. 74 (1961), 1–23.
- [8] CORRADI, K. und KATAI, J., *Egy megieyzés K. S. Gangadharan "Two classical lattice point problems" című dolgozatához*, MTA III Osztály Közleményei 17 (1967), 89–97.
- [9] ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, *Higher Transcendental Functions*, (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [10] GANGADHARAN, K. S., *Two classical lattice point problems*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., 57 (1961), 699–721.
- [11] HARDY, G. H., *Ramanujan*, (Cambridge, 1940).
- [12] HECKE, E., *Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper*, Mathematische Werke, Göttingen, Vandenhoeck, 1959, 159–171.
- [13] ———, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen* (Leipzig 1923).
- [14] HOLZER, L., *Zahlentheorie* (Teubner, Leipzig, 1958).

- [15] INGHAM, A. E., *On two classical lattice point problems*, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. 36 (1940), 131–138.
- [16] JORIS, H.,  *$\Omega$ -Theoreme für die Restglieder zweier arithmetischer Funktionen*, Dissertation, Forschungsinstitut für Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich. (dort erhältlich, oder bei der Bibliothek der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.)
- [17] LANDAU, E., *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (Teubner, Leipzig und Berlin, 1918).
- [18] —, *Über die Gitterpunkte in einem Kreis*, Fünfte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1924, 135–136.
- [19] PENNINGTON, W. B., *On the order of magnitude of Ramanujan's arithmetical function  $\tau(n)$* , Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 47 (1951), 668–678.
- [20] SZEGOE, G., und WALFISZ, A., *Über das Piltz'sche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern*, Math. Zeitschrift 26 (1927) 138–156, 467–486.
- [21] WAERDEN, B. L. VAN DER, *Algebra I*, Berlin, Springer, Grundlehren Bd 33, 5. Aufl., 1960.
- [22] WALFISZ, A., *Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen*. Dissertation, 1922, Göttingen.

Math. Seminar. E.T.H., Zürich

Eingegangen den 25. Februar 1972.